Musterlösung 2

1. **a)** Es gibt insgesamt $2^4 = 16$ Möglichkeiten

b)

$$
\begin{aligned}
A &= \{(0,1,1,1),\ (1,0,1,1),\ (1,1,0,1),\ (1,1,1,0)\} \\
B &= \{(1,1,1,1),\ (0,1,1,1),\ (1,0,1,1),\ (1,1,0,1),\ (1,1,1,0), \\
&\qquad (0,0,1,1),\ (0,1,0,1),\ (1,0,0,1),\ (0,1,1,0),\ (1,0,1,0),\ (1,1,0,0)\} \\
C &= \{(0,0,0,0),\ (1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1), \\
&\qquad (1,0,1,0),\ (1,0,0,1),\ (0,1,0,1)\}
\end{aligned}
$$

c) Ω hat $2^4 = 16$ Elemente. Da alle Elementarereignisse (x_1, x_2, x_3, x_4) gleich wahrscheinlich sein sollen und sich die Wahrscheinlichkeiten zu Eins summieren müssen, haben alle Elementarereignisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16}$. Die Wahrscheinlichkeiten von A, B, C kann man somit bestimmen, indem man jeweils zählt, wieviele Elemente die Ereignisse haben. Also

$$P[A] = \frac{|\,A\,|}{|\,\Omega\,|} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4},\ P[B] = \frac{|\,B\,|}{|\,\Omega\,|} = \frac{11}{16} \text{ und } P[C] = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

2. **a)** Wir setzten $A_1 \cup A_2 = A$ und verwenden die Formel des Skripts:

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A \cup A_3) = P(A) + P(A_3) - P(A \cap A_3) \\
&= P(A_3) + P(A_1 \cup A_2) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3).
\end{aligned}
$$

Wir schreiben $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = B \cup C$, wobei $B = A_1 \cap A_3$ und $C = A_2 \cap A_3$, und verwenden

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_3) + P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\
- P(B) - P(C) + P(B \cap C)
\end{aligned}
$$

Wegen $B \cap C = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, gilt dann:

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) \\
- P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Dies ist ein Spezialfall (für $n = 3$) vom Prinzip der Inklusion und Exklusion.

Bitte wenden!

b) Wir definieren das Ereignis $E_i =$ „Schalter R_i ist geschlossen". Die obige Formel ergibt dann:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) \\ &\quad - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\ &= 0.6 + 0.55 + 0.5 - 3 \cdot 0.25 + 0.1 = 1. \end{aligned}$$

Bemerken Sie, dass die Schalter *nicht* unabhängig sind.

3. a) a) Da

$$(A \cup B)^c \;=\; (A^c \cap B^c),$$

bekommt man mit Hilfe der Formel des Skripts

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= [1 - P(A^c)] + [1 - P(B^c)] - [1 - P(A^c \cap B^c)] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (1 - p) \\ &= p. \end{aligned}$$

Da $A \cap B^c$ und $A \cap B$ disjunkt sind mit $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A$, erhalten wir

$$P(A \cap B^c) \;=\; P(A) - P(A \cap B) \;=\; \frac{1}{2} - p.$$

Ähnlich bekommt man

$$P(A^c \cap B) \;=\; P(B) - P(A \cap B) \;=\; \frac{1}{2} - p.$$

Da alle Wahrscheinlichkeiten in $[0, 1]$ liegen müssen, muss p im Bereich $[0, \frac{1}{2}]$ liegen.

b) Wir definieren das Ereignis

$$C_i \;:=\; \text{„Höchstens } i \text{ der beiden Ereignisse } A \text{ und } B \text{ treten ein."},$$

für alle $i = 0, 1, 2$. Wir erhalten

$$P(C_0) \;=\; P(A^c \cap B^c) \;=\; p,$$

$$\begin{aligned} P(C_1) &= P(C_0) + P(A \cup B) - P(A \cap B) \\ &= P(C_0) + 1 - P(A^c \cap B^c) - P(A \cap B) \\ &= p + 1 - p - p \\ &= 1 - p \end{aligned}$$

und

$$P(C_2) \;=\; P(C_1) + P(A \cap B) \;=\; 1 - p + p \;=\; 1.$$